УДК 519.254:519.652(045)

Б. І. Мартюк, О. Г. Чолишкіна, П. О. Приставка

Національний авіаційний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХІДНИХ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ *B*-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Отримано похідні першого та другого порядку для поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку, визначених на рівномірному розбитті осі аргументу. Досліджено властивості отриманих похідних, подано теореми про норми та якості апроксимації.

Ключові слова: *сплайн; похідні; аналогові сигнали.*

Получены производные первого и второго порядка для полиномиальных сплайнов, близких к интерполяционным в среднем, на основании *B*-сплайнов пятого порядка, определенных на равномерном разбиении оси аргумента. Исследованы особенности полученных производных, представлены теоремы о нормах и качестве аппроксимации.

Ключевые слова: *сплайн; производные; аналоговые сигналы.*

Obtained derivatives of the first and second-order polynomial splines, interpolation close to the average, based on the *B*-splines of the fifth order, defined on a uniform partition argument axis. The features of the obtained derivatives represented theorem on approximation of standards and quality.

Keywords: *spline; derivative; analog signals*.

Постановка проблеми. В задачах обробки цифрових сигналів важливе місце займає питання вирішення проблеми пошуку локальних особливостей. Зважаючи на випадкову природу різного роду завад, пошук особливостей потребує вирішення питання згладжування сигналу, тож корисним було б використовувати математичні оператори на основі наближень, що мають відповідні обґрунтовані властивості апроксимації зі згладжуванням, наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1]. Зауважимо, що при фіксації аналогового сигналу має місце таке. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. Враховуючи технічні властивості систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації:

$$(p*\phi)(ih)=\frac{1}{h}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}}p(t)\phi(t-ih)\,dt=\overline{p}_i .$$

Тоді цифровий сигнал має таке подання:

$$p_i=\overline{p}_i+\varepsilon_i,\ i\in Z, \tag{1}$$

де ε_i – випадкова вада.

Для задач обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), в якості моделі $p(t)$ є потреба використовувати наближення з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтра. В роботі [1] показано, що лінійна комбінація *B*-сплайнів порядку вище першого за відліками (1) може мати використання в якості моделі аналогового сигналу, причому чим вищий порядок *B*-сплайну, тим кращими є згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності. Тож актуальним є дослідження подібних моделей для *B*-сплайнів високих порядків.

Для пошуку особливостей аналогового сигналу можна використовувати першу та другу похідні лінійних комбінацій *B*-сплайнів, відповідно, постає питання дослідження цих похідних. Так, у роботах [3–5] досліджено властивості похідних локальних поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів другого, третього та четвертого порядків. Тому актуальною є потреба отримання та дослідження похідних лінійних комбінацій *B*-сплайнів більш високого порядку, зокрема п’ятого, що обумовлено властивостями відповідних *B*-сплайнів [1].

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задачу відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М. П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А. О. Лигуном, О. А. Шумейко, В. В. Кармазіною [2–4] та у авторських роботах [5–6].

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної осі $\Delta_h: t_i=ih,\ i\in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)\in C^r,\ r\ge 2$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформацію про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття

Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$, при цьому істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому [6]:

$$S_{5,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{5,h}(t-ih), \tag{2}$$

де *B*-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r \ge 1$) визначається рекурентно таким чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

то $B_{r,h}(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau$.

Таким чином, *B*-сплайн п'ятого порядку має вигляд [7]:

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h; 3h], \\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h; -2h], \\ -\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h; -h], \\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h; 0], \\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0; h], \\ \frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h; 2h], \\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h; 3h]. \end{cases} \tag{3}$$

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h зручно використовувати явний вигляд лінійної комбінації

B-сплайнів (2) з урахуванням виразу (3):

$$S_{5,0}(p,t)=\frac{1}{3840}\left(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^5+$$
$$+\frac{1}{768}\left(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^4+$$
$$+\frac{1}{384}\left(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^3+$$
$$+\frac{1}{384}\left(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^2+$$
$$+\frac{1}{768}\left(-p_{i-2}-75p_{i-1}-154p_i+154p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3}\right)x+$$
$$+\frac{1}{3840}\left(p_{i-2}+237p_{i-1}+1682p_i+1682p_{i+1}+237p_{i+2}+p_{i+3}\right). \tag{4}$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (4) має місце така рівність:

$$S_{5,0}(p,t)=S_{5,0}(\overline{p},t)+S_{5,0}(\varepsilon,t).$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$\left|p(t)-S_{5,0}(p,t)\right|=\left|p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)-S_{5,0}(\varepsilon,t)\right|,$$

або для $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in Z$, до оцінки нерівності

$$\left|p(t)-S_{5,0}(p,t)\right|\le\left|p(t)-S_{5,0}(\overline{p},t)\right|+\varepsilon\left\|S_{5,0}\right\|, \tag{5}$$

де

$$\left\|S_{5,0}\right\|=\sup_{|\varepsilon_i|}\max_t\left|S_{5,0}(\varepsilon,t)\right|, \tag{6}$$

норма сплайн-оператора $S_{5,0}(p,t)$.

Поставимо за мету даної роботи отримати явний вигляд похідних сплайну $S_{5,0}(p,t)$ та знаходження норм і якості апроксимації для даних похідних.

Виклад основного матеріалу. Отримаємо явний вигляд 1-ї та 2-ї похідної для сплайнів $S_{5,0}(p,t)$.

$$S'_{5,0}(p,t)=\frac{1}{768}\left(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^4+$$
$$+\frac{1}{192}\left(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^3+$$
$$+\frac{1}{128}\left(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^2+$$
$$+\frac{1}{192}\left(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3}\right)x+$$
$$+\frac{1}{768}\left(-p_{i-2}-75p_{i-1}-154p_i+154p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3}\right), \quad (7)$$

$$S''_{5,0}(p,t)=\frac{1}{192}\left(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^3+$$
$$+\frac{1}{64}\left(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x^2+$$
$$+\frac{1}{64}\left(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3}\right)x+$$
$$+\frac{1}{192}\left(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3}\right). \quad (8)$$

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норм похідних сплайн-оператора $S_{5,0}(p,t)$ і задача визначення якості апроксимації.

Проведемо оцінку норм перших та других похідних сплайну $S_{5,0}(p,t)$.

Теорема 1. Для сплайну $S'_{5,0}(p,t)$ є вірним:

$$\left\|S'_{5,0}(p,t)\right\|_C=\frac{115}{192}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Доведення. За визначенням норми оператора лінійного нормового простору для похідної сплайну $S'_{5,0}(p,t)$ маємо:

$$\left\|S'_{5,0}(p,t)\right\|_C=\sup_{p_i}\max_t\left|S'_{5,0}(p_i,t)\right|.$$

Згрупуємо сплайн (7) відносно p_i:

$$S'_{5,0}(p,t)=\frac{1}{768}\Big((1-x)^4\,p_{i-2}+\left(-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(-154-88x+84x^2+8x^3-10x^4\right)p_i+$$
$$+\left(154-88x-84x^2+8x^3+10x^4\right)p_{i+1}+$$
$$+\left(75+84x+18x^2-12x^3-5x^4\right)p_{i+2}+(1+x)^4\,p_{i+3}\Big). \tag{9}$$

З представлення сплайну $S'_{5,0}(p,t)$ у вигляді (9) слідує, що

$$\left\|S'_{5,0}(p,t)\right\|_C\le\frac{1}{768}\left\|p(t)\right\|_C\max_{|x|\le1}A(x),$$

де

$$A(x)=|1-x|^4+\left|-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4\right|+$$
$$+\left|-154-88x+84x^2+8x^3-10x^4\right|+\left|154-88x-84x^2+8x^3+10x^4\right|+$$
$$+\left|75+84x+18x^2-12x^3-5x^4\right|+|1+x|^4.$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in[0;1]$:

$$1\pm x\ge0,$$
$$-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4<0,\ -154-88x+84x^2+8x^3-10x^4<0,$$
$$154-88x-84x^2+8x^3+10x^4\ge0,\ 75+84x+18x^2-12x^3-5x^4>0.$$

Отже

$$A(x)=(1-x)^4+75-84x+18x^2+12x^3-5x^4+154+88x-84x^2-8x^3+$$
$$+10x^4+154-88x-84x^2+8x^3+10x^4+75+84x+18x^2-12x^3-5x^4+$$
$$+(1+x)^4=12x^4-120x^2+460.$$

Таким чином,

$$\max_{x\in[0;1]}A(x)=460,$$

$$\left\|S'_{5,0}(p,t)\right\|_C\le\frac{115}{192}\left\|p(t)\right\|_C, \tag{10}$$

з іншого боку, при $x=0$ з (7) маємо:

$$S'_{5,0}\left(p,t\right)=\frac{1}{768}\left(-p_{i-2}-75p_{i-1}-154p_i+154p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3}\right).$$

Тоді для деякого часткового випадку

$$p^*_{i-2}=p^*_{i-1}=p^*_i=p^*_{i+1}=p^*_{i+2}=p^*_{i+3}=p^*,$$

то

$$\left\|S'_{5,0}\left(p,t\right)\right\|_C\geq\left\|S'_{5,0}\left(p^*,t\right)\right\|_C\geq\left|S'_{5,0}\left(p^*,t\right)\right|=\frac{115}{192}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Разом з нерівністю (10) це співвідношення доводить сформовану теорему.

Теорема 2. Якщо $p\left(t\right)\in C^5$, то при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'\left(t\right)-S'_{5,0}\left(\overline{p},t\right)=-\frac{7}{24}p'''\left(t\right)h^2-\frac{77}{1920}p^{(5)}\left(t\right)h^4-$$

$$-\frac{7}{24}p^{(4)}\left(t\right)h^2\tau-\frac{7}{48}p^{(5)}\left(t\right)h^2\tau^2+\mathrm{o}\left(h^4\right),$$

де

$$\tau=t-ih.$$

Доведення: Розкладемо сплайн $S'_{5,0}(\overline{p},t)$ в ряд Тейлора в околі точки ih з урахуванням $S'_{5,0}\left(\overline{p},t\right)\in C^5$.

$$S'_{5,0}(\overline{p},t)=S'_{5,0}(\overline{p},t^*)+S''_{5,0}(\overline{p},t^*)\tau+S'''_{5,0}(\overline{p},t^*)\frac{\tau^2}{2!}+$$

$$+S^{(4)}_{5,0}(\overline{p},t^*)\frac{\tau^3}{3!}+S^{(5)}_{5,0}(\overline{p},t^*)\frac{\tau^4}{4!}+o(h^4), \tag{11}$$

де

$$S'_{5,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{384h}\left(-\overline{p}_{i-2}-75\overline{p}_{i-1}-154\overline{p}_i+154\overline{p}_{i+1}+75\overline{p}_{i+2}+\overline{p}_{i+3}\right), \tag{12}$$

$$S''_{5,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{48h^2}\left(\overline{p}_{i-2}+21\overline{p}_{i-1}-22\overline{p}_i-22\overline{p}_{i+1}+21\overline{p}_{i+2}+\overline{p}_{i+3}\right), \tag{13}$$

$$S'''_{5,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{8h^3}\left(-\overline{p}_{i-2}-3\overline{p}_{i-1}+14\overline{p}_i-14\overline{p}_{i+1}+3\overline{p}_{i+2}+\overline{p}_{i+3}\right), \tag{14}$$

$$S^{(4)}_{5,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{2h^4}\left(\overline{p}_{i-2}-3\overline{p}_{i-1}+2\overline{p}_i+2\overline{p}_{i+1}-3\overline{p}_{i+2}+\overline{p}_{i+3}\right), \tag{15}$$

$$S_{5,0}^{(5)}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{h^5}\left(-\overline{p}_{i-2}+5\overline{p}_{i-1}-10\overline{p}_i+10\overline{p}_{i+1}-5\overline{p}_{i+2}+\overline{p}_{i+3}\right), \quad (16)$$

$$t^* = ih .$$

З урахуванням розкладу $S'_{5,0}\left(\overline{p},t\right)$ та $p\left(t\right)\in C^5$ в ряд Тейлора в околі точки ih, нескладно отримати, що для $\forall p\left(t\right)\in C^5$ при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t)=p'\left(t^*\right)+p''\left(t^*\right)\tau+p'''\left(t^*\right)\frac{\tau^2}{2!}+$$

$$+p^{(4)}\left(t^*\right)\frac{\tau^3}{3!}+p^{(5)}\left(t^*\right)\frac{\tau^4}{4!}+o(h^4), \quad (17)$$

причому:

$$\overline{p}_{i-2}=p\left(t^*\right)-\frac{5}{2}p'\left(t^*\right)h+\frac{19}{6}p''\left(t^*\right)h^2-\frac{65}{24}p'''\left(t^*\right)h^3+$$

$$+\frac{211}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4-\frac{665}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+\mathrm{o}\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i-1}=p\left(t^*\right)-\frac{3}{2}p'\left(t^*\right)h+\frac{7}{6}p''\left(t^*\right)h^2-\frac{15}{24}p'''\left(t^*\right)h^3+$$

$$+\frac{31}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4-\frac{63}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+\mathrm{o}\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i}=p\left(t^*\right)-\frac{1}{2}p'\left(t^*\right)h+\frac{1}{6}p''\left(t^*\right)h^2-\frac{1}{24}p'''\left(t^*\right)h^3+$$

$$+\frac{1}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4-\frac{1}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+\mathrm{o}\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i+1}=p\left(t^*\right)+\frac{1}{2}p'\left(t^*\right)h+\frac{1}{6}p''\left(t^*\right)h^2+\frac{1}{24}p'''\left(t^*\right)h^3+$$

$$+\frac{1}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4+\frac{1}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+\mathrm{o}\left(h^5\right),$$

$$\overline{p}_{i+2}=p\left(t^*\right)+\frac{3}{2}p'\left(t^*\right)h+\frac{7}{6}p''\left(t^*\right)h^2+\frac{15}{24}p'''\left(t^*\right)h^3+$$

$$+\frac{31}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4+\frac{63}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+\mathrm{o}\left(h^5\right),$$

$$\bar{p}_{i+3} = p\left(t^*\right) + \frac{5}{2}p'\left(t^*\right)h + \frac{19}{6}p''\left(t^*\right)h^2 + \frac{65}{24}p'''\left(t^*\right)h^3 +$$

$$+\frac{211}{120}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4 + \frac{665}{720}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5 + \mathrm{o}\left(h^5\right).$$

Підставляючи ці рівності в рівності (12) – (16) отримаємо:

$$S'_{5,0}(\bar{p},t^*) = p'\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p'''\left(t^*\right)h^2 + \frac{77}{1920}p^{(5)}\left(t^*\right)h^4 + o(h^5)\,, \quad (18)$$

$$S''_{5,0}(\bar{p},t^*) = p''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(4)}\left(t^*\right)h^2 + o(h^5)\,, \quad (19)$$

$$S'''_{5,0}(\bar{p},t^*) = p'''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(5)}\left(t^*\right)h^2 + o(h^5)\,, \quad (20)$$

$$S^{(4)}_{5,0}(\bar{p},t^*) = p^{(4)}\left(t^*\right) + o(h^5)\,. \quad (21)$$

$$S^{(5)}_{5,0}(\bar{p},t^*) = p^{(5)}\left(t^*\right) + o(h^5)\,. \quad (22)$$

Тоді, підставляючи рівності (18) – (22) в (11), будемо мати:

$$S'_{5,0}(\bar{p},t) = (p'\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p'''\left(t^*\right)h^2 + \frac{77}{1920}p^{(5)}\left(t^*\right)h^4) +$$

$$+\left(p''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(4)}\left(t^*\right)h^2\right)\tau + (p'''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(5)}\left(t^*\right)h^2)\frac{\tau^2}{2!} +$$

$$+p^{(4)}\left(t^*\right)\frac{\tau^3}{3!} + p^{(5)}\left(t^*\right)\frac{\tau^4}{4!} + o(h^4)\,. \quad (23)$$

За рівністю (17) та (23):

$$p'(t) - S'_{5,0}\left(\bar{p},t\right) = -\frac{7}{24}p'''(t)h^2 - \frac{77}{1920}p^{(5)}(t)h^4 -$$

$$-\frac{7}{24}p^{(4)}(t)h^2\tau - \frac{7}{48}p^{(5)}(t)h^2\tau^2 + \mathrm{o}\left(h^4\right).$$

Теорему доведено.

<u>*Наслідок 1*</u>. Для сплайну $S'_{5,0}\left(p,t\right)$ при $p\left(t\right) \in C^4$ є вірним

$$\left\| p'(t) - S'_{5,0}(\bar{p},t) \right\|_C \le \frac{7h^2}{24} \left\| p'''(t) \right\|_C + \frac{115}{192} \varepsilon \left\| p(t) \right\|_C + \mathrm{o}\left(h^4\right).$$

Аналогічно для сплайнів $S''_{5,0}(p,t)$, $S'''_{5,0}(p,t)$:

Теорема 3. Для сплайнів $S''_{4,0}(p,t)$, $S'''_{4,0}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,0}(p,t)$ є вірним:

$$\left\| S''_{5,0}(p,t) \right\|_C = \frac{1}{2} \left\| p(t) \right\|_C, \quad \left\| S'''_{5,0}(p,t) \right\|_C = \frac{9}{16} \left\| p(t) \right\|_C,$$

$$\left\| S^{(4)}_{5,0}(p,t) \right\|_C = \frac{13}{16} \left\| p(t) \right\|_C.$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 1.

Теорема 4. Якщо $p(t) \in C^5$, то при $h \to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність:

$$p''(t) - S''_{5,0}(\bar{p},t) = -\frac{7}{24} p^{(4)}(t) h^2 - \frac{7}{24} p^{(5)}(t) h^2 \tau + \mathrm{o}\left(h^3\right),$$

$$p'''(t) - S'''_{5,0}(\bar{p},t) = -\frac{7}{24} p^{(5)}(t) h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 2.

Наслідок 2. Для сплайну $S''_{4,0}(p,t)$ при $p(t) \in C^4$ та для сплайну $S'''_{4,0}(p,t)$ при $p(t) \in C^5$ є вірним:

$$\left\| p''(t) - S''_{5,0}(\bar{p},t) \right\|_C \le \frac{7h^2}{24} \left\| p^{(4)}(t) \right\|_C + \frac{1}{2} \varepsilon \left\| p(t) \right\|_C + \mathrm{o}\left(h^3\right),$$

$$\left\| p'''(t) - S'''_{5,0}(\bar{p},t) \right\|_C \le \frac{7h^2}{24} \left\| p^{(5)}(t) \right\|_C + \frac{9}{16} \varepsilon \left\| p(t) \right\|_C + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Наведемо приклади реалізації першої та другої похідних сплайну $S_{5,0}(p,t)$. На графіку (рис.1 (а)) точками позначено відліки сигналу та подано реалізацію згладжування сплайном $S_{5,0}(p,t)$, похідні $S'_{5,0}(p,t)$, $S''_{5,0}(p,t)$ відображено на рис. 1 (б) та (в) відповідно. Пунктиром (вертикальні ствпці на рис. 1 (б, в)) позначено окіл особливих точок сигналу. Як видно з графіків, в особливих точках сигналу, яким відповідають нулі похідної $S'_{5,0}(p,t)$, можна побачити мінімум або максимум сплайну $S_{5,0}(p,t)$, причому за мінімум відповідає додатньо визначена функція другої похідної $S''_{5,0}(p,t)$ з рис. 1 (в), а за максимум – від'ємно визначена функція.

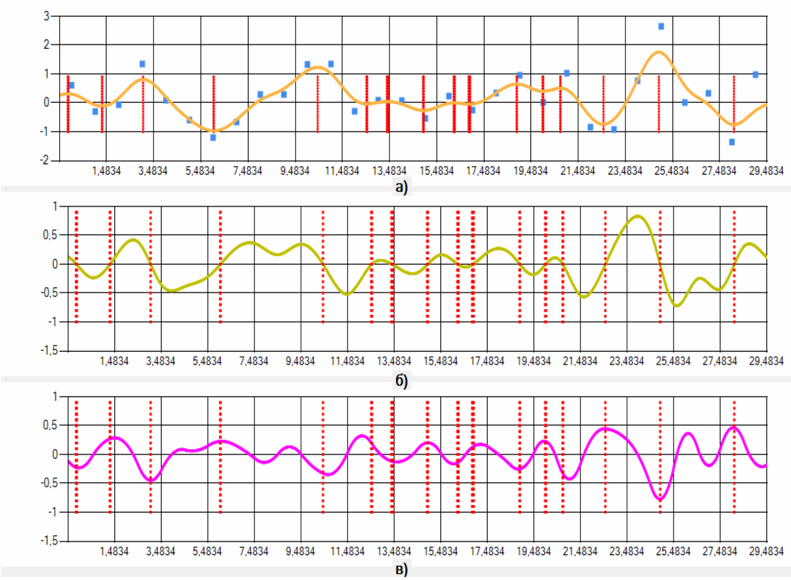

Рисунок 1 – Реалізація аналогового сигналу та згладжування його за допомогою сплайнів: а) відліки сигналу та сплайн $S_{5,0}(p,t)$; б) сплайн $S'_{5,0}(p,t)$; в) сплайн $S''_{5,0}(p,t)$.

Висновки. В роботі отримано явний вигляд похідних поліноміальних сплайну $S_{5,0}(p,t)$. Подано та доведено теореми про норми та оцінки якості апроксимації функції зазначеними сплайнами, наведено приклад їх застосування для визначення особливих точок випадкового сигналу.

Подальші дослідження можуть полягати в дослідженні похідних поліноміальних сплайнів більш високого порядку задля реалізації їх у задачах обробки цифрових сигналів та узагальненні теоретичних результатів досліджень для двовимірних та багатовимірних випадків.

Бібліографічні посилання

1. Приставка П. О. Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2011. Т.15. С. 4–17.

2. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. Київ: ІМ НАН України, 1996. 358 с.

3. Лигун А. А., Кармазина В. В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / Днепродзержинский индустр. ин-т. Днепродзержинск, 1989. 30 с. Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N 1559– Ук89.

4. Лигун А. А., Кармазина В. В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов / Днепродзержинский индустр. ин-т. Днепродзержинск, 1989. 38 с. Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N 2569–Ук89.

5. Приставка П. О., Чолишкіна О. Г., Мартюк Б. І. Дослідження похідних лінійної комбінації *B*-сплайнів четвертого порядку. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.: зб. наук. праць. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2016. Т. 20. С. 65–77.

6. Приставка П. О. Поліномаільні сплайни при обробці даних. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. 236 с

7. Приставка П. О. Чолишкіна О. Г. Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації // Математичне моделювання, 2007.

Надійшла до редколегії 19.07.17.